

# VRによる数学的対象の可視化

東京大学大学院数理科学研究科修士課程 名取雅生

2020年9月17日

# 研究の動機

抽象的なトポロジーの概念を**視覚的に**認識したい。

| 可視化の例 | 問題点                |
|-------|--------------------|
| 絵を描く  | 平面的                |
| 動画    | 平面的, リアルタイムで操作できない |
| 工作    | 物理的な制約, 材料などによる制限  |

## VR の利点

- 立体的, 空間への没入感
- リアルタイムで操作可能
- 直感的な操作
- 物理的な制約がない



vrhmd.mp4

## 共同開発者

- 後藤祐輝 (東京大学 D1)
- 鶴崎修功 (東京大学 D1)
- 中村伸一郎 (東京大学卒)
- 若月駿 (信州大学 学振 PD)

東京大学バーチャルリアリティ教育研究センター  
「数学における「概念の可視化」とその教育支援への応用」  
VR 機器の提供等の支援を受けています。

開発環境の整備にご協力いただいた同センターの青山一真様、  
実装に関してアドバイスを下さった明治大学の阿原一志様に  
この場を借りて御礼申し上げます。

# 開発環境

- 言語 : C#
- 3DCG ソフトウェア : Unity
- VR ヘッドマウントディスプレイ : Oculus Quest



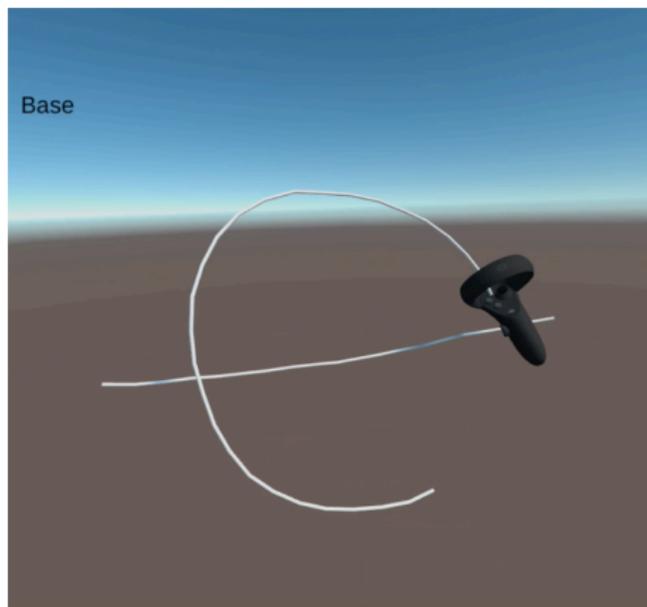
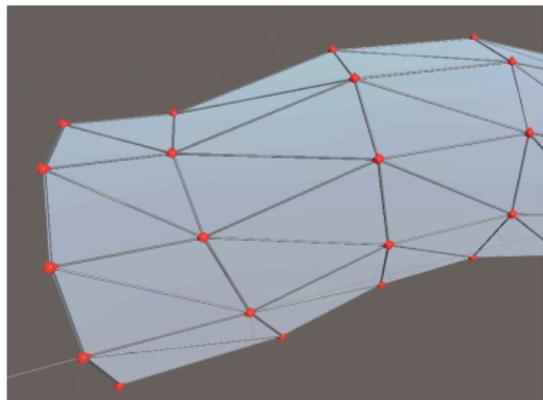
3次元空間内の曲線を取り扱うツールを作成した.

## 具体的な機能

- 曲線の描画
- 曲線の平行移動・回転
- 曲線の切断・結合
- Möbius エネルギーによる結び目の整形
- 手動による結び目の変形

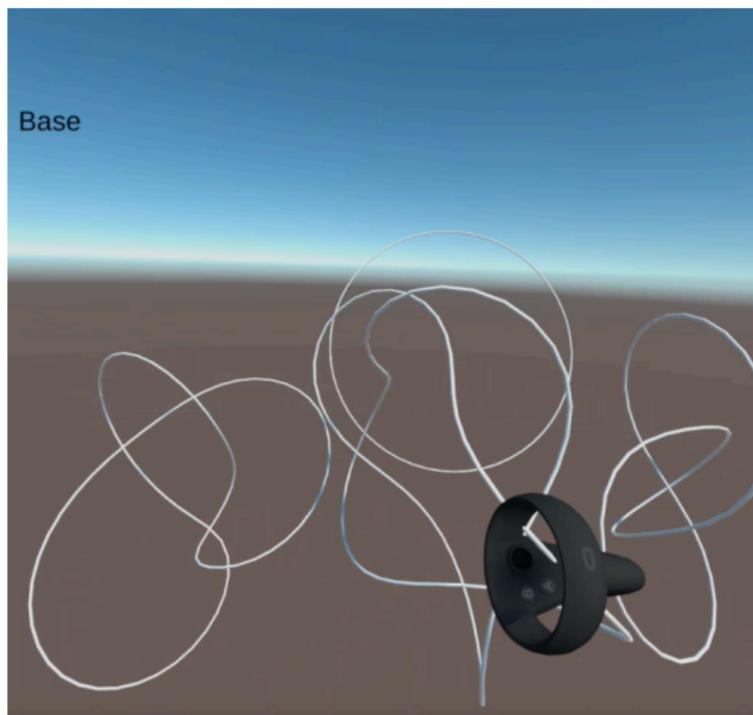
# 曲線の描画

曲線 = 各線分の長さが (殆ど) 一定な折れ線



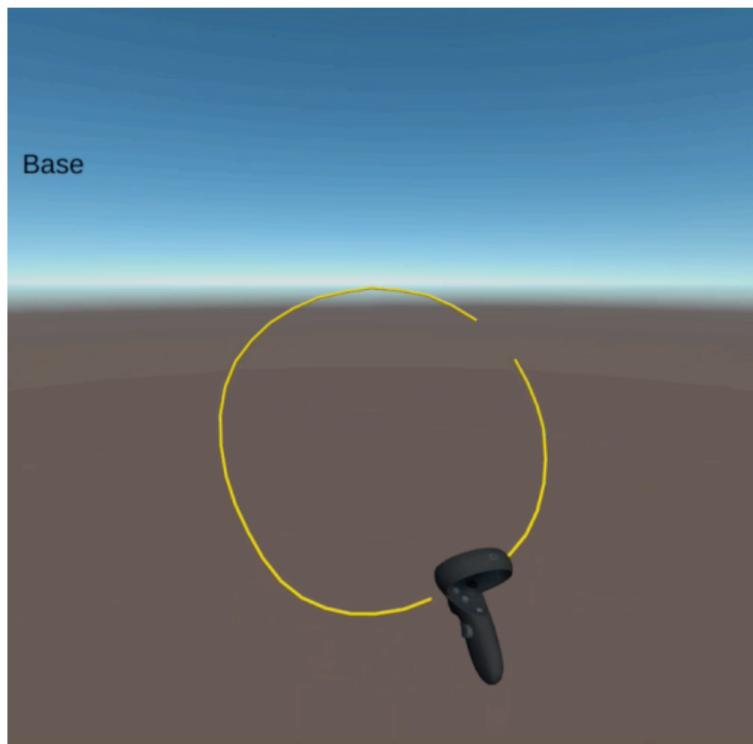
draw.mp4

# 曲線の平行移動・回転



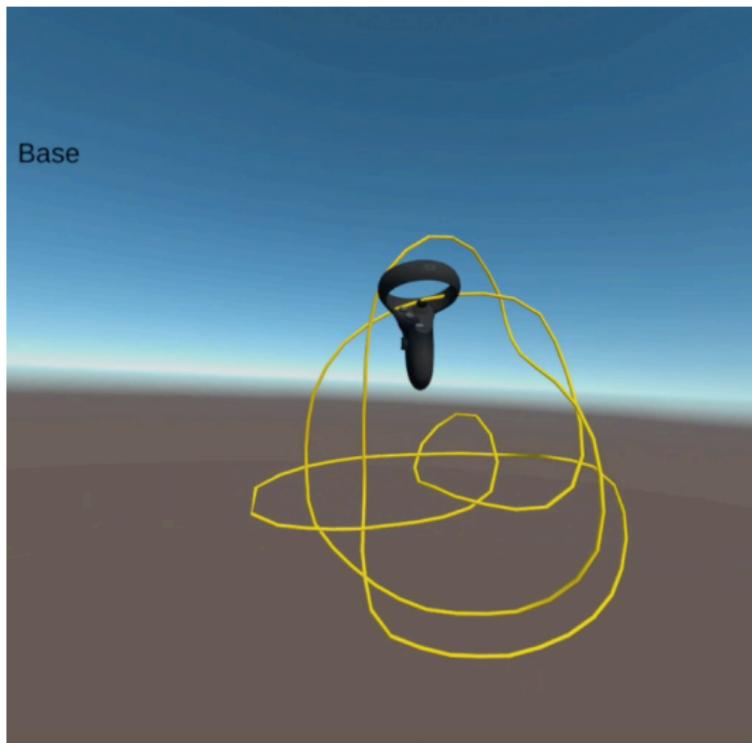
move.mp4

# 曲線の切断・結合



cutcombine.mp4

# 自明な結び目をほどく 1



trivialknot1.mp4

# Möbius エネルギーによる結び目の整形

## 定義 (大原 1988)

$h: S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$  : 弧長でパラメトライズされた結び目  
 $h$  の Möbius エネルギーを以下で定める:

$$E(h) = \iint_{S^1 \times S^1} \left( \frac{1}{\|h(x) - h(y)\|^2} - \frac{1}{\delta(x, y)^2} \right) dx dy$$

$\delta(x, y)$  :  $h(x), h(y)$  の間の短い方の弧長

## 例

正円  $h(x) = ((\cos 2\pi x)/2\pi, (\sin 2\pi x)/2\pi, 0)$  のエネルギーは  
 $E(h) = 4$ .

この定義を次のように離散化する.

# Möbius エネルギーによる結び目の整形

## 定義

$(v_i)_{i=0}^{N-1} \in (\mathbb{R}^3)^N$  : 隣接する 2 点の間隔が一定な点列

$$\begin{aligned} E((v_i)_i) &= \frac{1}{N^2} \left( \sum_{i \neq j} \frac{1}{\|v_i - v_j\|^2} \right) \left( \sum_i \|v_i - v_{i+1}\| \right)^2 - \frac{\pi^2 N}{3} + 4 \\ &= (\text{静電エネルギー}) \times (\text{弧長})^2 + (\text{定数}) \end{aligned}$$

## 事実 (大原)

$h: S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$  : 弧長でパラメトライズされた結び目

$(v_i^{(N)})_i$  :  $h$  を弧長で計って  $N$  等分した点列  
このとき,

$$E(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} E((v_i^{(N)})_i).$$

# Möbius エネルギーによる結び目の整形

## 整形のアルゴリズム (阿原 1992)

$(v_i)_i$  : 結び目を表す点列,  $s$  : 隣接する 2 点の間隔

$(v_i)_i$  に対して毎フレーム次の操作を行う.

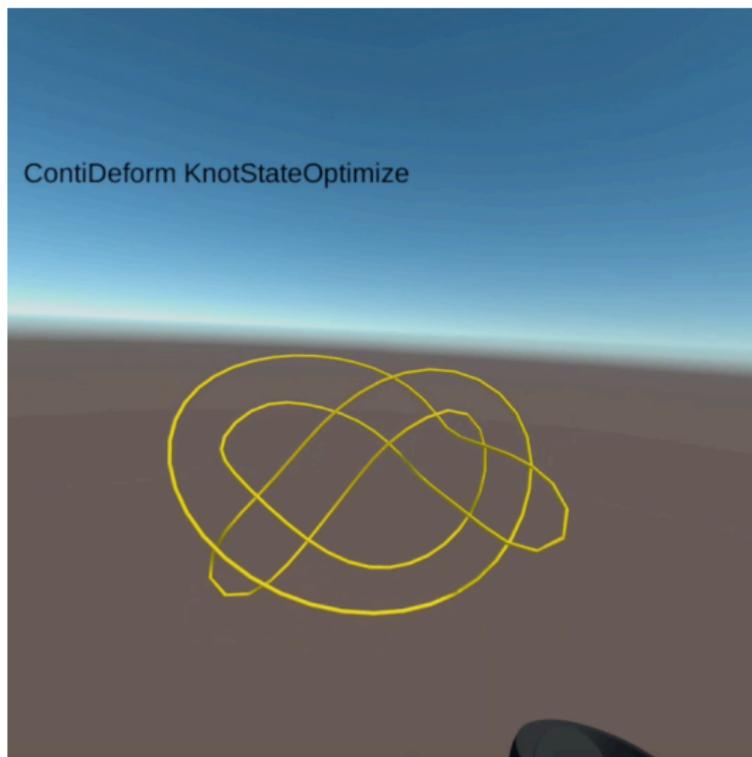
- ① 離散化された Möbius エネルギーの  $(v_i)_i$  における勾配を  $G((v_i)_i)$  とし,  $(v_i)_i$  を  $(v_i)_i - c \cdot G((v_i)_i)$  に置き換える.
- ② 弾性エネルギー

$$\frac{1}{2} \sum_i (\|v_{i+1} - v_i\| - s)^2$$

の勾配に沿って  $(v_i)_i$  を変化させ, 点の間隔を  $s$  に近づける.

加えて, 収束を速くするために慣性項を加えるなどの工夫を行った.

# Möbius エネルギーによる結び目の整形



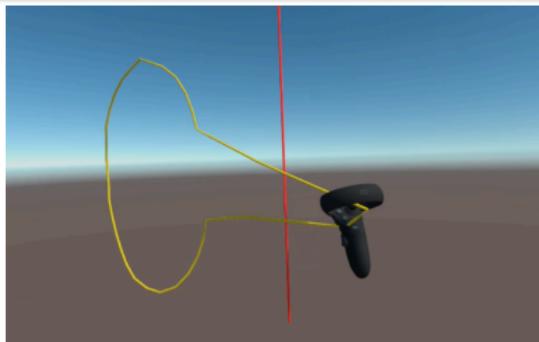
knotenergy.mp4

# 手動による結び目の変形

結び目上の2点を選択し、コントローラーを動かすと、2点の間の短い方の弧がコントローラーの移動に合わせて変形する。

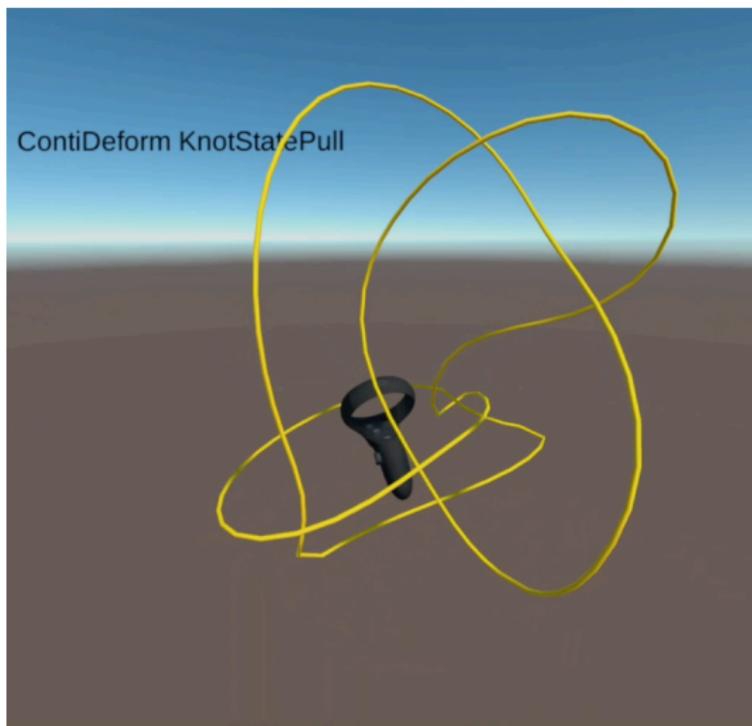
## 自己交叉しないための工夫

- 折れ線の各2線分間の距離の最小値が一定値を下回る場合は変形しない。
- 各フレームにおける変化量を一定値以下にする。



manual.mp4

# 自明な結び目をほどく



trivialknot2.mp4

- 結び目に対する数学的操作の実装
  - 結び目の変形のリンクやタングルへの拡張
  - Seifert 膜の生成
  - Jones 多項式等の不変量の計算
  - Kirby 計算
- 4次元空間内の対象を VR の空間内で取り扱うための基本的な機能の実装 (開発中)
- 曲面を取り扱う機能の実装 (曲面の分類等)
- Hopf fibration などの具体的な幾何的対象の描画
- 3次元リーマン多様体について, 計量と統合的な物理法則の実現

ご清聴ありがとうございました.